TITLE:
ファジィ集合に関する順序概念の基本的なオークションモデルへの応用 (不確実性と意思決定数理の諸問題)

AUTHOR(S):
桑野, 裕昭

CITATION:
桑野, 裕昭. ファジィ集合に関する順序概念の基本的なオークションモデルへの応用 (不確実性と意思決定数理の諸問題). 数理解析研究所講究録 2004, 1373: 263-268

ISSUE DATE:
2004-05

URL:
http://hdl.handle.net/2433/25551

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 263-268

ファジィ集合に関する順序概念の基本的なオークションモデルへの応用

金沢学院大学・経営情報学部 桑野 裕昭 (Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

1 はじめに

近年になって，多くの人々がインターネットを利用することが可能となってきた．このような人々はインターネットによって提供されることとなったサイバースペース・コミュニティにおいて多くの商品や様々なサービスを購入することができる．このようなコミュニティでは，多くの *e*-ビジネスや電子商取引の形態が現れる環境が提供されている．例えば，eBay (http://www.ebay.com/), Yahoo! Auctions (http://auctions.yahoo.com/), Auction4Biz.net (http://www.auction4biz.net/) 等の *e*-オークションはそれら形態の一つとして見なされる．ここで例示した新しいオークション・サイトと伝統的なオークション・ハウス — 例えば，Sotheby's(http://search.sothebys.com/) や Christie's(http://www.christies.com/) — を比較するといくつか異なる点が存在する．それぞれの入札者に関して言えば，前者のオークションでは入札対象物に対して必ずしも十分な知識を持たないと考えられる多数の入札者によって特徴づけられ，一方，後者のオークションではその入札対象物に対して個別に値踏みができるだけの入札者によって特徴づけられている．

これまでのオークションに関する数学的なアプローチは主にゲームの理論の手法を用いてなされてきた．このようなオークションに関する理論においては，入札者は入札者自身にとってその入札対象物がどのような価値を有するかを単一かつクリスプな値として評価する必要があった．更に，入札者それぞれは他の入札者がそれにどのような評価を与えるかについて知らないという状況下で，最も高い入札額を入札すべく自分自身の入札額を決定する必要があった．ここで注意しなければならないのは，上述の伝統的なオークション・ハウスで行われているようなオークションに参加している入札者はその入札対象物に適切な値踏みをするために個別あるいは共通の知識を十分に持っていることが前提とされていた点である．確かにこのような前提が成り立つ場合の理論的解析においては従来のゲームの理論による分析が有効であろうが，*e*-オークションのように不特定多数が入札者として参加するオークションを解析するためには必ずしもこのようなオークション・モデルが有効であるとは限らないと考えられる．つまり，*e*-オークションのように不特定かつ潜在的な入札者が多く存在する場合には，いくらかの入札者達は値踏みのための十分な知識を持たないことが予想さ

れ，すべての入札者が適切かつクリスプな値踏みを行えるという仮定が成り立たない可能性がある．そこで，本報告においては入札者が入札対象物に対する自分自身と他の入札者達の評価額をクリスプな数ではなくファジィ数として持つ場合の基本的なオークション・モデルについて考察する．この不確定性を含んだオークション・モデルにおいて，入札額はクリスプな数であるが評価額はファジィ数であるために，各入札者の利得ベクトルもファジィ・ベクトルとなる．そのため，ファジィな利得ベクトルを比較する必要性が生ずる．そこで，我々のモデルにおいてはファジィ集合に対するファジィな順序関係を用いて解析を進め，最後に基本的な結果を示す．

2 準備

この節では，いくつかの順序関係とファジィ数の基礎的事項，及び，基本的なオークション・モデルを準備する．

2.1 順序関係

ここではベクトル，ある集合族に属する集合に関する順序関係を導入する．

まず，順序錐を導入する．K を $\mathbb{R}^n$ の非空，凸かつ pointed な錐とする．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x} \leq_K \boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in K$ によって定義するとき，この K を順序錐と呼ぶ．特に $K = \mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ のとき，$\leq_K$ は $\mathbb{R}^n$ における通常の擬順序関係 $\leq$ と一致する．すなわち，二項関係 $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$，あるいは同値な意味で，$\boldsymbol{x} \leq_{\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$x_i \leq y_i, (i = 1, \ldots, n)$ が成立していることを表している．次に，$\mathbb{R}^n$ のコンパクトかつ凸な部分集合全体の集合族を $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ と表す．このとき，$A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ に対して，次の条件が成立するとき $A \leq_K B$ と表すことと定義する．(cf. [5, 6])

(i) 任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対して，$\boldsymbol{x} \leq_K \boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{y} \in B$ が存在する．

(ii) 任意の $\boldsymbol{y} \in B$ に対して，$\boldsymbol{x} \leq_K \boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in A$ が存在する．

注意 2.1. $n = 1$ のときを考える．2 つの有界な閉区間 $[a_L, a_U], [b_L, b_U] \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ に対して $[a_L, a_U] \leq_{\mathbb{R}_+} [b_L, b_U]$ が成り立つことは，下限及び上限それぞれに対して $a_L \leq b_L$ かつ $a_U \leq b_U$ が成り立つことと必要十分である．

2.2 ファジィ数

Zadeh[11] によって不確定な対象を理論的に取り扱うためのファジィ集合が提案された．特に，実直線においてある条件を満たすファジィ集合をファジィ数と呼ぶのであった．正確にはファジィ数は次のように定義される．

すべての実数からなる集合 $\mathbb{R}$ 上でファジィ集合 $\widetilde{a}$ が定義されているとする．このとき $\widetilde{a}$ がファジィ数であるとはそのメンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{a}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ が次の条件を満たすときをいう．

(i) $\mu_{\tilde{a}}$ は上半連続関数である．

(ii) $\mu_{\tilde{a}}$ は擬凹関数である．

(iii) 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) = 1\}$ は一点集合である．

(iv) 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) > 0\}$ はコンパクト集合である．

これらファジィ数の比較に関してはいくつかの研究がなされている．(例えば，Adam[1], Campos et al.[2], Tanaka et al.[9] や Yager[10] を参照のこと．) 特に，ファジィ数の比較基準として最も有名なものの一つにファジィ・マックス順序が知られている．これは 1985 年に Ramík とŘímánek によって提案されたもので，次のように定義される ([8]).

$\tilde{a}, \tilde{b}$ をファジィ数とする．このとき，二項関係 $\preceq$ がファジィマックス順序であるとは，各 $\alpha \in [0,1]$ に対して不等式 $[\tilde{a}]^\alpha \leq_{\mathbb{R}_+} [\tilde{b}]^\alpha$ が満たされるときをいう．ここで，$[\tilde{a}]^\alpha, [\tilde{b}]^\alpha$ はそれぞれファジィ数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ の α-レベル集合を表している．また，この条件が成り立つとき，$\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ と表す．($\succeq$ も同様に定義することができる．)

実は，この関係と同値な概念が異なる構成方法によって Dubois と Prade によって提案されている ([3]). 彼らは次に示すように Zadeh の拡張原理の意味において特殊なファジィ集合を定義した．

$\tilde{a}, \tilde{b}$ をファジィ数とする．このとき，ファジィ集合 $\widetilde{\max}\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ 及び $\widetilde{\min}\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ は次のメンバーシップ関数

$$\mu_{\widetilde{\max}\{\tilde{a},\tilde{b}\}}(x) = \sup_{a,b \in \mathbb{R}:\ \max\{a,b\}=x} \min\{\mu_{\tilde{a}}(a), \mu_{\tilde{b}}(b)\}$$

及び

$$\mu_{\widetilde{\min}\{\tilde{a},\tilde{b}\}}(y) = \sup_{a,b \in \mathbb{R}:\ \min\{a,b\}=y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(a), \mu_{\tilde{b}}(b)\}$$

によりそれぞれ特徴づけられる．この 2 つのファジィ集合とファジィ・マックス順序に関して Ramík とŘímánek は次のような関係を導いた ([8]).

(i) $\widetilde{\max}\{\tilde{a}, \tilde{b}\} = \tilde{b}$ と $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ は必要十分である．

(ii) $\widetilde{\min}\{\tilde{a}, \tilde{b}\} = \tilde{a}$ と $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ は必要十分である．

以上が，ファジィ数に関する順序に関しての準備である．

続いて，$\mathbb{R}^2 (n \geq 2)$ におけるある条件を満たすファジィ集合の場合についてまとめておく．

Kurano at el.[4] ではファジィ・マックス順序の拡張となる擬順序が $\mathbb{R}^n$ 上の凸ファジィ集合全体からなる集合上で定義されている．ここではそれを拡張されたファジィ・マックス順序と呼び，次のように定義する．

$\tilde{a}, \tilde{b}$ を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された凸ファジィ集合とし，K を $\mathbb{R}^n$ の非空，凸かつ pointed な錐とする．このとき，拡張されたファジィ・マックス順序 $\tilde{a} \preceq_K \tilde{b}$ は以下の条件によって定義される．

(i) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x} \leq_K \boldsymbol{y}$ かつ $\mu_{\tilde{a}}(\boldsymbol{x}) \leq \mu_{\tilde{b}}(\boldsymbol{y})$ を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(ii) 任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x} \leq_K \boldsymbol{y}$ かつ $\mu_{\tilde{a}}(\boldsymbol{x}) \geq \mu_{\tilde{b}}(\boldsymbol{y})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

また，[4] においては $\widetilde{a} \leq_K \widetilde{b}$ とすべての $\alpha \in (0,1]$ に対して $[\widetilde{a}]^\alpha \leq_K [\widetilde{b}]^\alpha$ が成立することは同値であることが示されている．

2.3 基本的なオークション・モデル

第一価格オークション及び第二価格オークションは基本的なオークション・モデルの中でも最も知られたものである ([7])．

第一価格オークション 封印入札の形態をとり，最も高額な入札を行った入札者が自分の行った入札額を支払い入札対象物を得るオークションのことである．

第二価格オークション 封印入札の形態をとり，最も高額な入札を行った入札者が2番目に高い入札額を支払い入札対象物を得るオークションのことである．

簡単のため，ここでは2人ゲームとして第一価格オークション及び第二価格オークションを定式化するための記号を導入しておく．以下では $A = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$ をプレイヤーIの可能な入札額全体からなる集合とし，$B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ をプレイヤーIIの可能な入札額全体からなる集合とする．また，入札額には $a_1 < \cdots < a_\ell$ 及び $b_1 < \cdots < b_m$ なる仮定をおく．

3 ファジィ・オークション・モデル

オークションに関する理論は入札対象物に対する不確定な (ファジィな) 評価を含まないゲーム理論にその基礎をおいている．そこで，ここではファジィな評価を許すファジィ・オークション・モデルについて焦点を絞ることにする．以下、凸ファジィ数 $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ によりプレイヤーI, IIそれぞれの評価を表すこととする．

3.1 第一価格オークション

利得双行列を $\widetilde{P}$ で表す．その各要素 $\widetilde{p}_{ij} = \left(\widetilde{p}^{I}_{ij}, \widetilde{p}^{II}_{ij}\right)$, $i = 1, \ldots, \ell$, $j = 1, \ldots, m$ はプレイヤーI, IIの利得の組を表し，それぞれは

$$\widetilde{p}^{I}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{a} - a_i, & a_i \geq b_j \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad i = 1, \cdots, \ell,\ j = 1, \cdots, m$$

及び

$$\widetilde{p}^{II}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{b} - b_j, & a_i \leq b_j \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad i = 1, \cdots, \ell,\ j = 1, \cdots, m$$

によって定義される．

3.2 第二価格オークション

この場合にも第一価格オークション同様に利得双行列を定義しなければならない．第二価格オークションについては利得双行列を $\widetilde{Q}$ で表す．その各要素 $\widetilde{q}_{ij} = \left(\widetilde{q}^{I}_{ij}, \widetilde{q}^{II}_{ij}\right), i = 1, \ldots, \ell, j = 1, \ldots, m$ は $\widetilde{P}$ の場合と同様にプレイヤー I, II の利得の組を表すが，その定義は以下で示すようにそれとは異なっている．定義は以下の通り．

$$\widetilde{q}^{I}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{a} - b_j, & a_i \geq b_j \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad i = 1, \cdots, \ell, \ j = 1, \cdots, m$$

及び

$$\widetilde{q}^{II}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{b} - a_i, & a_i \leq b_j \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad i = 1, \cdots, \ell, \ j = 1, \cdots, m.$$

3.3 支配戦略

支配戦略均衡 (cf. [7]) は通常のオークションの理論において最も基本的な均衡概念の一つである．そこで，以下では，まず，前小節で導入したファジィ・オークション・モデルにおける支配性を拡張されたファジィ・マックス順序を用いて導入する．

ここでは第一価格オークションについて調べるが，同様の議論を第二価格オークションについても得ることができる．このとき，順序錐 $K^m \subseteq \mathbb{R}^m, K^\ell \subseteq \mathbb{R}^\ell$ は与えられているものとする．また，入札額 $a_i, i = 1, \ldots, \ell$ を戦略と同一視する．利得双行列 $\widetilde{P}$ 及びプレイヤー I, II それぞれの利得行列 $\widetilde{P}^I$, $\widetilde{P}^{II}$ を表示すると次のようになる．

$$\widetilde{P} = \left(\widetilde{p}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \left(\widetilde{p}^{I}_{11}, \widetilde{p}^{II}_{11}\right) & \left(\widetilde{p}^{I}_{12}, \widetilde{p}^{II}_{12}\right) & \cdots & \left(\widetilde{p}^{I}_{1m}, \widetilde{p}^{II}_{1m}\right) \\ \left(\widetilde{p}^{I}_{21}, \widetilde{p}^{II}_{21}\right) & \left(\widetilde{p}^{I}_{22}, \widetilde{p}^{II}_{22}\right) & \cdots & \left(\widetilde{p}^{I}_{2m}, \widetilde{p}^{II}_{2m}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\widetilde{p}^{I}_{\ell 1}, \widetilde{p}^{II}_{\ell 1}\right) & \left(\widetilde{p}^{I}_{\ell 2}, \widetilde{p}^{II}_{\ell 2}\right) & \cdots & \left(\widetilde{p}^{I}_{\ell m}, \widetilde{p}^{II}_{\ell m}\right) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{P}^I = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{I}_{11} & \widetilde{p}^{I}_{12} & \cdots & \widetilde{p}^{I}_{1m} \\ \widetilde{p}^{I}_{21} & \widetilde{p}^{I}_{22} & \cdots & \widetilde{p}^{I}_{2m} \\ \vdots & & & \\ \widetilde{p}^{I}_{\ell 1} & \widetilde{p}^{I}_{\ell 2} & \cdots & \widetilde{p}^{I}_{\ell m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{p}}^{I}_{1} \\ \widetilde{\boldsymbol{p}}^{I}_{2} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{p}}^{I}_{\ell} \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{I}_{i} = \left(\widetilde{p}^{I}_{i1} \quad \widetilde{p}^{I}_{i2} \quad \cdots \quad \widetilde{p}^{I}_{im}\right),\ i = 1, \ldots, \ell,$$

$$\widetilde{P}^{II} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{II}_{11} & \widetilde{p}^{II}_{12} & \cdots & \widetilde{p}^{II}_{1m} \\ \widetilde{p}^{II}_{21} & \widetilde{p}^{II}_{22} & \cdots & \widetilde{p}^{II}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{p}^{II}_{\ell 1} & \widetilde{p}^{II}_{\ell 2} & \cdots & \widetilde{p}^{II}_{\ell m} \end{pmatrix} = \left(\widetilde{\boldsymbol{p}}^{II}_{1} \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{II}_{2} \quad \cdots \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{II}_{m}\right) \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{II}_{j} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{II}_{1j} \\ \widetilde{p}^{II}_{2j} \\ \vdots \\ \widetilde{p}^{II}_{\ell j} \end{pmatrix},\ j = 1, \ldots, m.$$

定義 3.1.

- プレイヤー I について，戦略 a_i が拡張されたファジィ・マックス順序の意味で戦略 a_k を支配するとは，$\widetilde{p}_k^I \leq_{K^m} \widetilde{p}_i^I$ が成り立つときをいう．
- プレイヤー II について，戦略 b_j が拡張されたファジィ・マックス順序の意味で戦略 b_k を支配するとは，$\widetilde{p}_k^{II} \leq_{K^\ell} \widetilde{p}_j^{II}$ が成り立つときをいう．

定義 3.2. プレイヤー I, II それぞれに支配戦略 a_i^*, b_j^* が存在するとき，戦略対 (a_i^*, b_j^*) を支配戦略均衡と呼ぶ．

命題 3.1. *支配戦略均衡が存在すれば一意である．*

4 まとめ

本研究において，オークションの理論において最も基本的なモデルのファジィ化にあたるファジィ・オークション・モデルを提案した．更に，拡張されたファジィ・マックス順序の意味での支配戦略均衡を与え，その性質について述べた．

参考文献

[1] Adamo, J.M., "Fuzzy decision trees", *Fuzzy Sets and Systems* **4**, 207-219, 1980.

[2] Campos, L. Gonzales, A. and Vila, M.-A. "On the use of the ranking function approach to solve fuzzy matrix game in a direct way". *Fuzzy Sets and Systems*, **49**, 193-203, 1992.

[3] Dubois, D. and Prade H., "Operations on fuzzy numbers", *Int. J. Systems Sci.* **9**, 613-626, 1978.

[4] M. Kurano, M. Yasuda, J. Nakagami and Y. Yoshida, "Ordering of convex fuzzy sets – A brief survey and new results", *J. Operations Research Society of Japan* **43**, 138-148, 2000.

[5] Kuroiwa, D. "The natural criteria in set-valued optimization", *RIMS kokyuroku*, **1031**, 85-90, 1998.

[6] Kuroiwa, D., Tanaka, T. and T.X.D. Ha, "On cone convexity of set-valued maps", *Nonlinear Analysis Theory and Applications*, **30**, 1487-1496, 1997.

[7] Krishna, V., *Auction Theory*, San Diego, CA: Academic Press, 2002.

[8] Ramík, J., Římánek, J., "Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization", *Fuzzy Sets and Systems*, **16**, 123-138. 1985.

[9] Tanaka, H., Ichihashi, H. and Asai, K., "A formulation of fuzzy linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers", *Control and Cybernetics*, **3**, 185-194, 1984.

[10] Yager, R.R., "A procedure of ordering fuzzy subsets of the unit interval". *Inform. Sci.*, **24**, 143-161, 1981.

[11] Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets". *Information and Control*, **8**, 338-353, 1965.